2. PORŢI LOGICE (9.04.2004)

2.0. INTRODUCERE

2.1. CONSTANTE ŞI VARIABILE BOOLEENE. TABELE DE ADEVĂR

În algebra booleană sunt două *constante*: 0 şi 1. În funcţie de tipul de logică folosit, de tehnologia utilizată, materializarea celor două constante se obţine prin niveluri de tensiune bine stabilite. De exemplu, valoarea 0 logic se poate obţine comod în anumite condiţii prin simpla legare la masă a intrărilor unui circuit numeric.

Variabilele booleene pot lua una din cele două valori, 0 sau 1. O variabilă care nu este 0, va fi obligatoriu 1 şi reciproc. Este important de reţinut faptul că 0 şi 1 nu reprezintă două numere, ci **stări** sau **niveluri logice**. O serie de sinonime desemnează cele două stări logice posibile, cele mai folosite fiind prezentate în tabelul următor.

Tabelul 2.1

Sinonime pentru starea logică 0, respectiv 1

Denumirea în limba română		Denumirea în limba engleză	
Stare logică 0	Stare logică 1	Logic 0	Logic 1
Fals	Adevărat	False	True
JOS	SUS	Low	High
NU	DA	No	Yes
Oprit	Pornit	Off	On

Tabelul de adevăr este o modalitate de descriere a dependenţei ieşirii unui circuit logic combinaţional de valorile logice ale intrărilor. În tabelul de adevăr sunt prezente toate combinaţiile posibile ale variabilelor de intrare. În tabel liniile se trec ordonat crescător, prima coloană aferentă variabilelor de intrare corespunzând bitului mai semnificativ – MSb al vectorului de intrare, iar ultima coloană bitului mai puţin semnificativ – LSb.

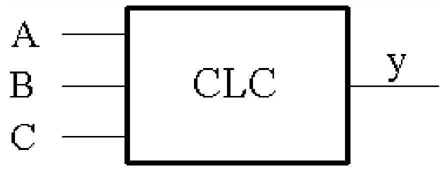


Figura 2.1. Un circuit logic cu trei intrări şi o ieşire.

Tabelul de adevăr

A	B	C	y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Circuitul logic combinaţional din figura 2.1 are trei intrări A, B şi C, iar ieşirea a fost notată cu y. Din citirea tabelului 6 se poate afirma că:

y este Adevărat dacă şi numai dacă:

- A este Fals *ŞI* B este Fals *ŞI* C este Adevărat
- A este Fals *ŞI* B este Adevărat *ŞI* C este Adevărat
- A este Adevărat *ŞI* B este Adevărat *ŞI* C este Adevărat,

ceea ce se poate exprima astfel:

$$y = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot C$$

În continuare este prezentat tabelul de adevăr al celor trei funcţii elementare (NEGARE, ŞI, SAU).

Tabelul 2.2

Tabelul de adevăr al funcţiilor elementare

A	B	$\overline{A}$	$A \cdot B$	$A + B$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	0

Teoremă. Orice funcţie poate fi realizată cu un singur tip elementar împreună cu inversoare.

2.1. NUMERE BINARE

Majoritatea oamenilor este obişnuită cu sistemul de numeraţie zecimal. În tehnica numerică este mult mai potrivit **sistemul de numeraţie binar** care foloseşte baza 2 şi două numere: 0 şi 1. Această alegere este convenabilă deoarece cele două numere se pot reprezenta uşor prin două stări distincte ale unor mărimi electrice (contact închis sau deschis, nivel de tensiune ridicat sau scăzut, prezenţa sau absenţa unui curent printr-o porţiune de circuit, etc.). În tehnica numerică dar mai ales în domeniul calculatoarelor sunt utilizate de asemenea pentru scurtarea lungimii reprezentării numerelor sistemul **octal** (baza de numeraţie 8) şi cel **hexazecimal** (baza de numeraţie 16).

Un număr x exprimat într-o bază oarecare b este o sumă de puteri a bazei respective:

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + \ldots + a_{-m} b^{-m} \tag{2.1}$$

Numerele $a_n \ldots a_m$ se numesc cifre sau **digiţi** (*digits* în limba engleză). Fiecare cifră este cuprinsă între 0 şi b-1. Astfel, sistemul octal este format din cifrele 0…7, cel zecimal din cifrele 0…9, iar cel hexazecimal din cifrele 0…9, A, B, C, D, E, F. Un număr exprimat prin ecuaţia 2.1 se exprimă printr-un şir de cifre $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ **,** $a_{-1} \ldots a_{-m}$ separate de un simbol pentru virgulă. Acest simbol este virgula în literatura română şi punctul în cea engleză.

2.2. POSTULATELE ŞI TEOREMELE ALGEBREI BOOLEENE

Postulatele şi teoremele algebrei booleene permit efectuarea de operaţii menite a simplifica modul de exprimare la funcţiilor logice şi implicit oferă posibilitatea uşurării implementării fizice a acestor funcţii.

Tabelul 2.3

Postulatele algebrei booleene

T/P	Denumire	Enunţ
P1	Element neutru	$a + 0 = a; \quad a + 1 = 1$ $a \cdot 0 = 0; \quad a \cdot 1 = a$
P2	Complement	$a + \overline{a} = 1$ $a \cdot \overline{a} = 0$
P3	Comutativitate	$a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$
P4	Distributivitate	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (b + c)$

Tabelul 2.4

Teoremele algebrei booleene

T1	Idempotență	$a + a = a$ $a \cdot a = a$
T2	Contradicție	$a \cdot \overline{a} = 0$
T3	Dubla negație	$\overline{\overline{a}} = a$
T4	Asociativitate	$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$
T5	De Morgan	$\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$ $\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$
T6	Absorbție	$a + a \cdot b = a$ $a \cdot (a + b) = a$
T7		$a \cdot b + a \cdot \overline{b} = a$ $(a + b) \cdot (a + \overline{b}) = a$
T8		$a + a \cdot \overline{b} = a$ $a \cdot (\overline{a} + b) = a \cdot b$
T9		$a \cdot b + \overline{a} \cdot c + b \cdot c = a \cdot b + \overline{a} \cdot c$ $(a + b) \cdot (\overline{a} + c) \cdot (b + c) = (a + b) \cdot (\overline{a} + c)$

2.3. PORȚI LOGICE ELEMENTARE

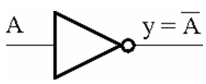
Funcțiile logice elementare se implementează cu ajutorul porților logice. În categoria porților *fundamentale* întră inversorul, poarta ŞI, poarta SAU. *Elementare* sunt considerate şi porțile ŞI-NU, SAU-NU, SAU-EXCLUSIV, SAU-EXCLUSIV NEGAT. Toate vor fi studiate în continuare.

2.3.1. INVERSORUL. FUNCȚIA NU

Cea mai simplă operație logică elementară operează cu o singură variabilă de intrare. Operația elementară NU (*NOT* în limba engleză) aplicată variabilei binare A se notează

$$y = \overline{A}$$

şi se citeşte "*y* este (egal) cu *A* negat" sau "y este (egal) cu non A". Poarta logică care îndeplineşte funcția NU (negare) se numeşte inversor. Cerculețul din figură este asociat inversării, triunghiul fiind consacrat amplificării neinversoare a semnalului, amplificare evident în putere în acest caz. Circuitul are o singură intrare şi o singură ieşire şi se numeşte circuit inversor, de negare, sau de complementare.



A	$y = \overline{A}$
0	1
1	0

Figura 2.8. Inversorul şi tabelul de adevăr.

Funcționarea în regim dinamic a inversorului ideal este ilustrată în figura 2.9..

În practică se utilizează şi operatori neinversori. Un asemenea circuit mai este denumit *buffer* sau etaj tampon. Rolul său este de amplificare în curent (şi implicit în putere).

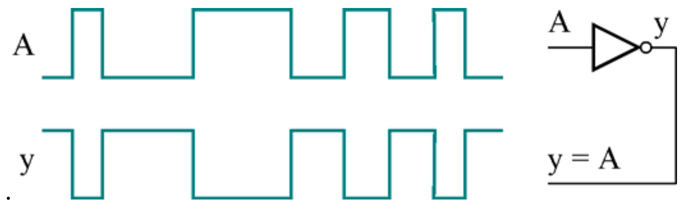


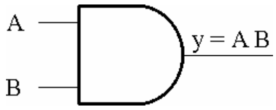
Figura 2.9. Inversorul – comportare dinamică.

2.3.2. POARTA ŞI

Operaţia elementară ŞI (*AND* în limba engleză) între variabilele binare A şi B se notează

$$y = A \cdot B$$

şi se citeşte "*y* este (egal cu) *A* ŞI *B*". Punctul din expresia logică ŞI nu trebuie confundat cu semnul înmulţirii – operaţia aritmetică de înmulţire şi operaţia logică ŞI sunt chestiuni diferite. Confuzia poate fi sporită de tabelul de adevăr al operaţiei ŞI, care este identic cu cel al operaţiei de înmulţire. Poarta ŞI este un circuit cu cel puţin 2 intrări şi o singură ieşire, ieşirea circuitului fiind 1 atunci când toate intrările sunt 1 logic.



A	B	$y = A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Figura 2.10. Poarta ŞI cu două intrări şi tabelul de adevăr.

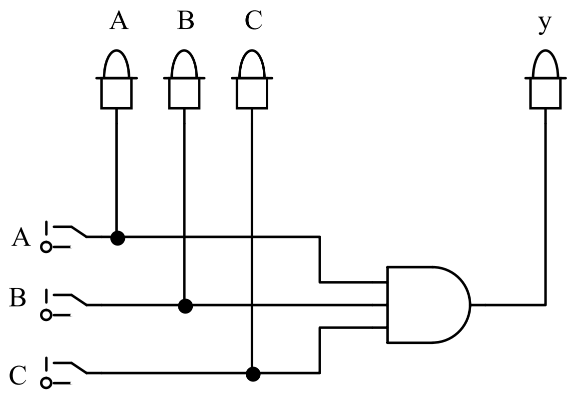


Figura 2.11. Circuit pentru simularea funcţionării statice a unei porţi ŞI cu 3 intrări.

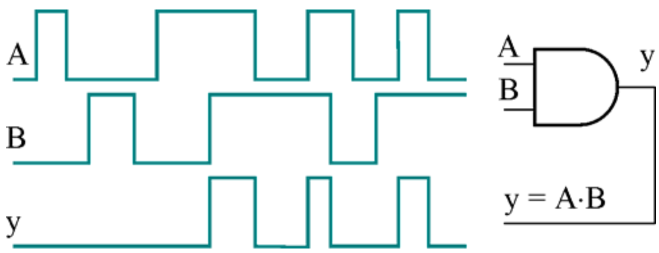


Figura 2.12. Funcţionarea în regim dinamic a porţii ŞI cu două intrări.

Aplicație. Poarta ŞI utilizată ca circuit de validare.

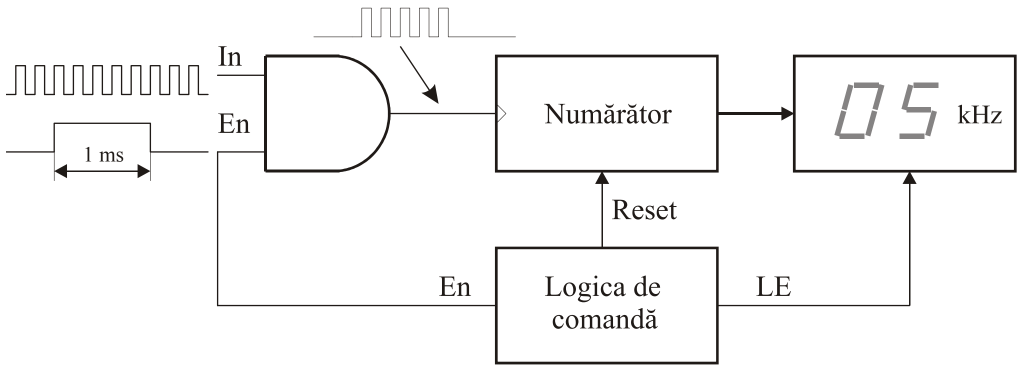


Figura 2.13. Schema funcțională a unui frecvențmetru numeric.

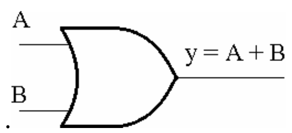
2.3.3. POARTA SAU

Operația elementară SAU (OR în limba engleză) între variabilele binare A şi B se notează

$$y = A + B$$

şi se citeşte "y este (egal) cu A SAU B". Semnul "+" din expresia logică SAU nu trebuie confundat cu semnul adunării – operația aritmetică de adunare şi operația logică SAU sunt chestiuni diferite. Tabelul de adevăr al operației SAU nu mai este identic cu cel al adunării, deoarece în algebra booleană nu se poate depăşi valoarea 1. Adică 1 + 1 = 1 (aici semnul + indică operația logică SAU), pe când 1 +1 = 2 în aritmetică. Acest lucru este valabil şi pentru operația SAU între mai multe variabile, de exemplu 1 + 1 + 1 = 1. Poarta **SAU** este cu cel puțin 2 intrări şi o singura ieşire.

Circuitul funcționează astfel: nivelul de tensiune la ieşirea circuitului corespunde lui 1 logic atunci când cel puțin uneia dintre intrări i se aplică un nivel de tensiune ce corespunde lui 1 logic, adică ieşirea este 1 logic dacă cel puțin una dintre intrări este 1 logic.



A	B	$y = A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Figura 2.14. Poarta SAU şi tabelul de adevăr.

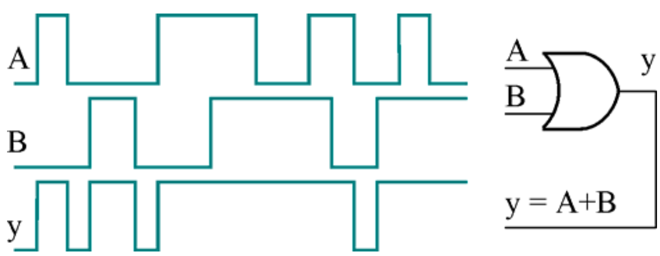


Figura 2.15. Funcționarea în regim dinamic a porții SAU cu două intrări.

Aplicație. Poarta SAU utilizată într-o schemă de supraveghere.

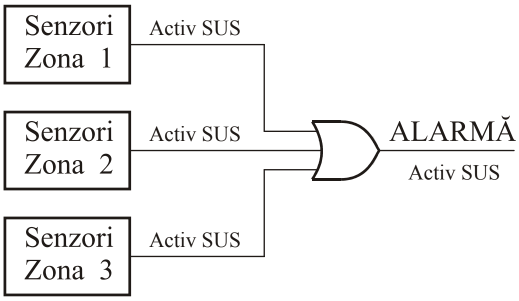


Figura 2.16. Schema simplificată a unui circuit de alarmă cu trei zone de supraveghere.

2.3.4. POARTA ŞI-NU. POARTA SAU-NU

Se obțin din combinarea porților elementare prezentate anterior.

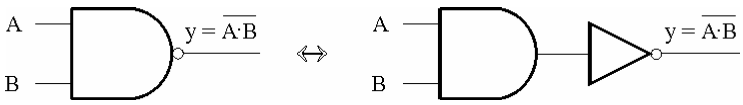


Figura 2.17. Poarta ŞI-NU cu două intrări.

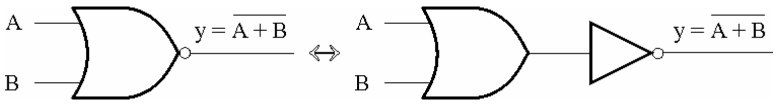


Figura 2.18. Poarta SAU-NU cu două intrări.

2.3.5. TEOREMELE LUI DE MORGAN. REPREZENTĂRI ECHIVALENTE

Teoremele lui De Morgan sunt frecvent utilizate în algebra booleană. Ele sunt reluate aici pentru cazul a trei variabile:

$$\overline{a+b+b} = \bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} \quad \text{şi} \quad \overline{d\cdot e\cdot f} = \bar{d}+\bar{e}+\bar{f}.$$

Ca o consecință directă a acestor teoreme, poarta SAU-NU din figura 2.x este echivalentă cu poarta "NU-ŞI" care operează cu aceleaşi variabile de intrare. Este bineînțeles vorba despre aceeaşi poartă, cu deosebirea că reprezentarea normală este indicat a se folosi cu variabile de intrare active SUS, pe când cea echivalentă este potrivită la semnalele active JOS.

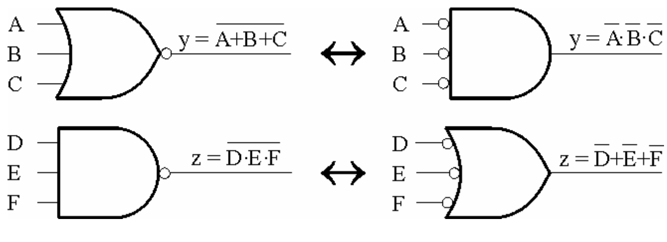


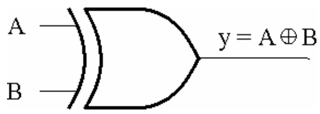
Figura 2.19. Simboluri echivalente.

2.3.6. POARTA SAU-EXCLUSIV. POARTA SAU-EXCLUSIV NEGAT

Funcțiile SAU-EXCLUSIV (*Exclusive OR* sau *XOR* în limba engleză) şi SAU-EXCLUSIV NEGAT (*Exclusive NOR* sau *XNOR*) sunt funcții compuse care pot fi implementate cu ajutorul porților ŞI, SAU, NU. Funcția SAU-EXCLUSIV între variabilele binare A şi B este

$$y = A \oplus B = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B = \overline{A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}}$$

şi se citeşte "y este (egal) cu A SAU-EXCLUSIV B". Simbolul porții şi tabelul de adevăr aferent sunt prezentate în figura 2.20. Poarta SAU-EXCLUSIV are 2 intrări şi o singură ieşire, care este 1 logic doar dacă cele 2 intrări au valori logice complementare.



A	B	$y = A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Figura 2.20. Poarta SAU-EXCLSIV şi tabelul de adevăr.

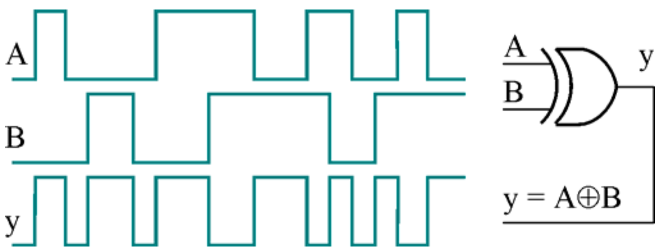
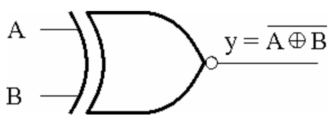


Figura 2.22. Funcționarea în regim dinamic a porții SAU-EXCLUSIV.

Funcția SAU-EXCLUSIV NEGAT între variabilele binare A şi B este

$$y = \overline{A \oplus B} = \overline{A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B} = A \cdot B \oplus \overline{A} \cdot \overline{B}$$

şi se citeşte "y este (egal cu) A SAU-EXCLUSIV NEGAT B". Simbolul porții şi tabelul de adevăr aferent sunt prezentate în figura 2.21.



A	B	$y = \overline{A \oplus B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Figura 21. Poarta SAU-EXCLSIV NEGAT şi tabelul de adevăr.

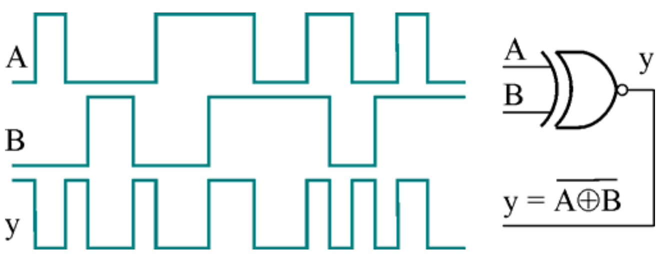


Figura 2.23. Funcționarea în regim dinamic a porții SAU-EXCLUSIV NEGAT.

Tabelul 2.8

Proprietățile funcțiilor SAU-EXCLUSIV și SAU-EXCLUSIV NEGAT

SAU-EXCLUSIV	SAU-EXCLUSIV NEGAT
$a \oplus 0 = a$ $a \oplus 1 = \overline{a}$	$\overline{a \oplus 0} = \overline{a}$ $\overline{a \oplus 1} = a$
$a \oplus a = 0$ $a \oplus \overline{a} = 1$	$\overline{a \oplus a} = 1$ $\overline{a \oplus \overline{a}} = 0$
$a \oplus b = b \oplus a$	$\overline{a \oplus b} = \overline{b \oplus a}$
$a \oplus b \oplus c = (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$	$\overline{a \oplus b \oplus c} = \overline{(a \oplus b) \oplus c} = \overline{a \oplus (b \oplus c)}$
$a \oplus b = \overline{a} \oplus \overline{b}$	$\overline{a \oplus b} = \overline{\overline{a} \oplus \overline{b}}$
$a \oplus b = \overline{\overline{a} \oplus b} = \overline{a \oplus \overline{b}}$	$\overline{a \oplus b} = a \oplus \overline{b} = \overline{a} \oplus b$
$a \oplus (a \cdot b) = a \cdot \overline{b}$ $a \oplus (\overline{a} \cdot b) = a + b$	$\overline{a \oplus (a \cdot b)} = \overline{a} + b$ $\overline{a \oplus (\overline{a} \cdot b)} = \overline{a} \cdot \overline{b}$
$a \oplus (a + b) = \overline{a} \cdot b$	$\overline{a \oplus (a + b)} = a + \overline{b}$
$a \cdot (b \oplus c) = (a \cdot b) \oplus (a \cdot c)$ $\overline{a \cdot (b \oplus c)} = (a + b) \oplus (a + c)$	$\overline{a} + \overline{b \oplus c} = \overline{(a \cdot b) \oplus (a \cdot c)}$ $a + \overline{(b \oplus c)} = \overline{(a + b) \oplus (a + c)}$

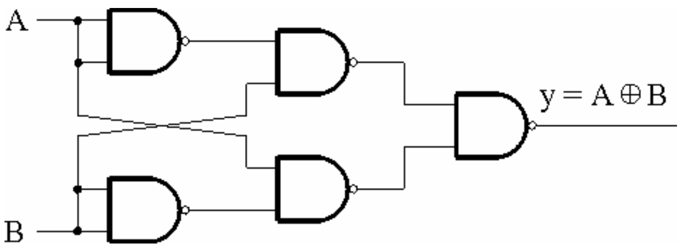


Figura 2.24. SAU-EXCLUSIV- implementare cu 5 porți ŞI-NU.

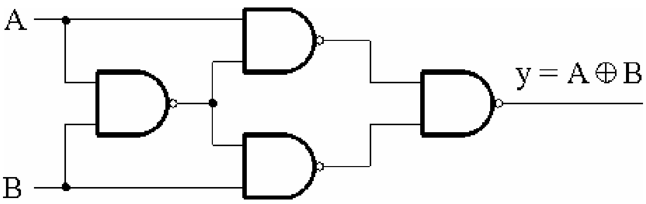


Figura 2.25. SAU-EXCLUSIV- implementare cu 4 porți ŞI-NU.

Aplicație. Poarta SAU-EXCLUSIV ca element de testare.

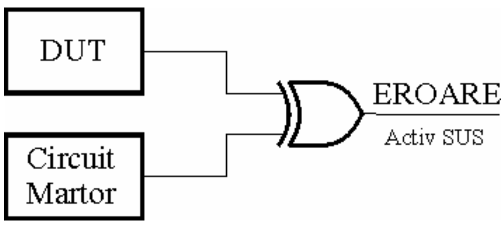


Figura 2.26. Schemă de testare cu circuit SAU-EXCLUSIV.